Teoria miary i całki
WPPT IIr. semestr zimowy 2009/10
KOLOKWIUM 1

3/12/09

Zadanie 1

Na przestrzeni mierzalnej (X, Σ) dane są miary μ i ν takie, że $\mu(X) = \nu(X) < \infty$. Czy rodzina $\{A \in \Sigma : \mu(A) = \nu(A)\}$ musi być sigma-ciałem?

ROZWIĄZANIE: Nie. Weźmy $X = \{a, b, c, d\}$ i μ - miarę liczącą, a ν - przypisującą masy $\nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 2$ oraz $\nu(\{c\}) = \nu(\{d\}) = 0$. Założenia są spełnione, bo $\mu(X) = \nu(X) = 4$. Miary te równają się na następujących zbiorach $\emptyset, X, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$. Rodzina ta jest zamknięta na dopełnienia i sumy rozłączne, ale nie jest zamknięta na przekroje, (na przykład $\{a, c\} \cap \{a, d\} = \{a\}$, a miary różnią się na $\{a\}$) więc nie jest to nawet ciało.

Zadanie 2

Na $X = [0, \infty)$ określamy funkcję zbioru $\xi(A) = \sup A$ (uwaga, supremum zbioru pustego wynosi 0).
a) Wykaż, że ξ jest miarą zewnętrzną oraz
b) wskaż zbiory mierzalne względem ξ.

ROZWIĄZANIE: a) Sprawdzamy aksjomaty miary zewnętrznej: 1. Supremum zbioru pustego jest zero, więc ok. 2. Monotoniczność jest, bo supremum większego zbioru jest większe. 3. Przeliczalna podaddytywność też jest bo supremum sumy mnogościowej zbiorów jest równa supremum ich supremów, a to jest mniejsze od sumy tych supremów (bo są to liczby nieujemne).
b) Mierzalne są tylko zbiory: $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0\}^c$ i X. Pierwszy i ostatni są zawsze mierzalane (względem każdej miary zewnętrznej). Weźmy $E = \{0\}$ i dowolny A. Mamy $\xi(A) = \sup A$. Natomiast $\xi(A \cap E) = \sup 0 = 0$ oraz $\xi(A \cap E^c) = \sup A \backslash \{0\} = \sup A$, więc $\xi(A \cap E) + \xi(A \cap E^c) = 0 + \sup A = \xi(A)$. Stąd E i E^c są mierzalne.
Jeśli rozważymy jakikolwiek inny zbiór E, to E i E^c zawierają po co najmniej jednej liczbie niezerowej (czyli dodatniej), powiedzmy $0 < x \in E$ i $0 < y \in E^c$. Niech $A = \{x, y\}$. Wtedy $\xi(A) = \sup\{x, y\}$, natomiast $\xi(A \cap E) = \sup\{x\} = x$ i $\xi(A \cap E^c) = \sup\{y\} = y$, zatem $\xi(A \cap E) + \xi(A \cap E^c) = x + y > \max\{x, y\}$, czyli nie ma równości.

Zadanie 3

Wykaż, że jeśli $f = g - h$ jest rozkładem funkcji znakowanej na różnicę dwóch funkcji nieujemnych, to $g = f^+$ i $h = f^-$ wtedy i tylko wtedy gdy g i h mają ,,rozłączne nośniki", tzn. w każdym punkcie dziedziny przynajmniej jedna z nich jest równa zeru.

ROZWIĄZANIE: Jeśli $g = f^+$ i $h = f^-$, to wiadomo, że w każdym punkcie co najmniej jedna z nich się zeruje. Na odwrót: Przypuśćmy, że g i h nie równają się f^+ i g^+. Wiemy, że wtedy istnieje funkcja nieujemna i taka że $g = f^+ + i$ oraz $h = f^- + i$. Skoro nie ma wspomnianych równości, to $i \neq 0$, czyli istnieje x taki, że $i(x) > 0$. Wtedy $g(x) > 0$ i $h(x) > 0$, czyli funkcje te nie mają rozłącznych nośników. Zatem jeśli nośniki te są rozłączne, to wspomniane równości zachodzą.

Zadanie 4

Wykazać, że jeśli funkcje f_n dążą do f według miary i monotonicznie, to dążą do niej prawie wszędzie.

ROZWIĄZANIE: Wiemy, że dla każdego ϵ miary zbiorów $\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$ dążą do zera. Z monotoniczności, jest to zstępujący ciąg zbiorów. Zatem jego przekrój (nazwijmy go A_ϵ) ma miarę zero. Poza tym przekrojem zachodzi warunek, że od pewnego miejsca n_0 (zależnego od punktu) mamy $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Weźmy teraz ciąg ϵ_k malejący do zera. Zbiór $A = \bigcup_k A_{\epsilon_k}$ też ma miarę zero. Poza tym zbiorem zachodzi warunek, że dla dowolnego ϵ_k od pewnego miejsca (zależnego od ϵ_k i od x, ale to nie szkodzi) jest $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. To dokładnie oznacza, że poza zbiorem A (miary zero) jest zbieżność, czyli że mamy zbieżność prawie wszędzie.

Zadanie 5

Oblicz całkę $\int f\,d\mu$, gdzie μ jest miarą na $[0, \pi]$ zadaną wzorem

$$\mu(E) = \int_E \sin x\,d\lambda$$

oraz

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + \cos x), & x \in Q \\ 0, & x \in IQ \end{cases}.$$

ROZWIĄZANIE: Po pierwsze zbiór Q ma mairę Lebesgue'a zero, więc $\mu(Q) = \int_Q \sin x\,d\lambda = 0$, czyli Q jest też miary zero dla μ. Zatem na tym zbiorze możemy zmienić funkcję i to nie wpłynie na całkę według miary μ. Więc zmieniamy i kładziemy tam też $\ln(1 + \cos x)$. Mamy teraz do policznenia całkę

$$\int\limits_{[0,\pi]} \ln(1 + \cos x)\,d\mu,$$

a to, jak wiemy, jest

$$\int\limits_{[0,\pi]} \ln(1 + \cos x)\sin x\,d\lambda,$$

którą z kolei można zamienić na całkę Riemanna:

$$\int_0^\pi \ln(1 + \cos x)\sin x\,dx.$$

Tę ostatnią liczymy przez podstawienie $1 + \cos x = t$ (ważne jest, że $1 + \cos x$ jest różnowartościowa na $[0, \pi]$) i wychodzi

$$\int_2^0 \ln t\,dt = -\int_0^2 \ln t\,dt = -t\ln t + t|_0^2 = -2\ln 2 + 2.$$

(jest to całka niewłaściwa, bo w zerze trzeba policzyć granicę z $t \ln t$, ale zakładam, że wszyscy wiedzą, że to jest 0).